SCHEDA INTEGRATIVA ▶ Sviluppo di Heaviside

Quando non è possibile ricavare l'antitrasformata di Laplace direttamente dalla tabella perché la funzione è complessa, si utilizza il metodo di Heaviside o dello sviluppo in frazioni parziali. Di seguito sono prese in considerazione funzioni aventi poli reali semplici e poli complessi coniugati.

a) Antitrasformata di Laplace di una funzione *F*(*s*) con poli reali semplici

Si consideri, ad esempio, la funzione razionale fratta:

$$F(s)=\frac{(s+1)}{(s+2)\cdot(s+4)} \qquad [2.6]$$

La funzione *F*(*s*), già fattorizzata sia al denominatore che al numeratore, presenta uno zero $z_1=-1$ e due poli reali e semplici, $p_1=-2$ e $p_2=-4$. Per calcolare l'antitrasformata di Laplace con il metodo dello sviluppo in frazioni parziali si osserva la seguente procedura:

- si sviluppa la *F*(*s*) nella seguente somma di frazioni parziali:

$$F(s)=\frac{(s+1)}{(s+2)\cdot(s+4)}=\frac{a_1}{s+2}+\frac{a_2}{s+4} \qquad [2.7]$$

- si calcolano i coefficienti a_1 e a_2 nel seguente modo:

$$a_1=\left|(s+2)\cdot F(s)\right|_{s=-2} \qquad a_1=\left|(s+2)\cdot\frac{(s+1)}{(s+2)\cdot(s+4)}\right|_{s=-2}=-\frac{1}{2}$$

$$a_2=\left|(s+4)\cdot F(s)\right|_{s=-4} \qquad a_2=\left|(s+4)\cdot\frac{(s+1)}{(s+2)\cdot(s+4)}\right|_{s=-4}=+\frac{3}{2}$$

- si sostituiscono a_1 e a_2 così calcolati nella [2.7] e si ha:

$$F(s)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+4} \qquad [2.8]$$

- si esegue l'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [2.8] e si applica la proprietà della linearità:

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+4}\right]=-\frac{1}{2}\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]+\frac{3}{2}\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]$$

$$f(t)=-\frac{1}{2}\cdot e^{-2\cdot t}+\frac{3}{2}\cdot e^{-4\cdot t}$$

b) Antitrasformata di Laplace di una funzione *F*(*s*) con poli complessi coniugati

La funzione:

$$F(s)=\frac{2\cdot s+12}{s^2+2\cdot s+5} \qquad [2.9]$$

presenta i poli complessi coniugati $p_1=-1+j\cdot 2$ e $p_2=-1-j\cdot 2$. Per calcolare l'antitrasformata di Laplace con il metodo dello sviluppo in frazioni parziali è necessario:

- fattorizzare il denominatore della funzione *F*(*s*):

$$F(s)=\frac{2\cdot s+12}{(s+1-j\cdot 2)\cdot(s+1+j\cdot 2)} \qquad [2.10]$$

- sviluppare la funzione in frazioni parziali:

$$F(s)=\frac{a_1}{(s+1-j\cdot 2)}+\frac{a_2}{(s+1+j\cdot 2)} \qquad [2.11]$$

- calcolare i coeffienti a_1 e a_2 applicando il procedimento sopra illustrato:

$$a_1=\left|(s+1-j\cdot 2)\cdot F(s)\right|_{s\to -1+j\cdot 2} \qquad a_1=\left|(s+1-j\cdot 2)\cdot\frac{2\cdot s+12}{(s+1-j\cdot 2)\cdot(s+1+j\cdot 2)}\right|_{s\to -1+j\cdot 2}=1-j\cdot 2{,}5$$

$$a_2=\left|(s+1+j\cdot 2)\cdot F(s)\right|_{\to -1-j\cdot 2} \qquad a_2=\left|(s+1+j\cdot 2)\cdot\frac{2\cdot s+12}{(s+1-j\cdot 2)\cdot(s+1+j2)}\right|_{s\to -1-j\cdot 2}=1+j\cdot 2{,}5$$

Si fa osservare che quando i poli sono complessi coniugati anche i residui ad essi corrispondenti sono complessi coniugati. Non è necessario, pertanto, ripetere il calcolo per ricercare il secondo coefficiente.

- sostituire i coefficienti a_1 e a_2 nella [2.11]:

$$F(s)=\frac{1-j\cdot 2{,}5}{(s+1-j\cdot 2)}+\frac{1+j\cdot 2{,}5}{(s+1+j\cdot 2)} \qquad [2.12]$$

- eseguire l'antitrasformata di ambo i membri della [2.12]:

$$L^{-1}\left[F(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{1-j\cdot 2{,}5}{(s+1-j\cdot 2)}\right]+L^{-1}\left[\frac{1+j\cdot 2{,}5}{(s+1+j\cdot 2)}\right]$$

$$f(t)=(1-j\cdot 2{,}5)\cdot e^{-(+1-j\cdot 2)\cdot t}+(1+j\cdot 2{,}5)\cdot e^{-(+1+j\cdot 2)\cdot t}$$

$$f(t)=(1-j\cdot 2{,}5)\cdot e^{-t}\cdot e^{j\cdot 2\cdot t}+(1+j\cdot 2{,}5)\cdot e^{-t}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot t}$$

$$f(t)=e^{-t}\cdot\left(e^{j\cdot 2\cdot t}-j\cdot 2{,}5\cdot e^{j\cdot 2\cdot t}+e^{-j\cdot 2\cdot t}+j\cdot 2{,}5\cdot e^{-j\cdot 2\cdot t}\right) \qquad [2.13]$$

Sviluppando il secondo membro della [2.13] si ottiene:

$$f(t)=e^{-t}\cdot\left\{\left[e^{j\cdot 2\cdot t}+e^{-j\cdot 2\cdot t}\right]-j\cdot 2{,}5\cdot\left[e^{j\cdot 2\cdot t}-e^{-j\cdot 2\cdot t}\right]\right\} \qquad [2.14]$$

Tenendo presente che:

$$\cos\alpha=\frac{e^{j\cdot\alpha}+e^{-j\cdot\alpha}}{2} \qquad \mathrm{sen}\alpha=\frac{e^{j\cdot\alpha}-e^{-j\cdot\alpha}}{2\cdot j}$$

la [2.14] si può scrivere come:

$$f(t)=e^{-t}\cdot\left[\left(2\cdot\frac{e^{j\cdot 2\cdot t}+e^{-j\cdot 2\cdot t}}{2}\right)-j\cdot 2{,}5\cdot(2\cdot j)\cdot\left(\frac{e^{j\cdot 2\cdot t}-e^{-j\cdot 2\cdot t}}{2\cdot j}\right)\right]$$

$$f(t)=e^{-t}\cdot\left[2\cdot\cos(2\cdot t)+5\cdot\mathrm{sen}(2\cdot t)\right] \qquad [2.15]$$