ESERCIZIO 1

Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase della seguente funzione di trasferimento:

$$F(s) = \frac{10^3(s+0{,}1)}{s(s+1)^2}$$

Determiniamo gli ZERI:

$$(s+0{,}1) = 0 \ \rightarrow s = -0{,}1 \Rightarrow zero\ in - 0{,}1$$

Determiniamo i POLI:

$$s(s+1)^2 = 0 \ \rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ (s+1)^2 = 0 \end{cases} \ \Rightarrow \ \begin{cases} polo\ nell'origine \\ polo - 1\ con\ molteplicità\ 2 \end{cases}$$

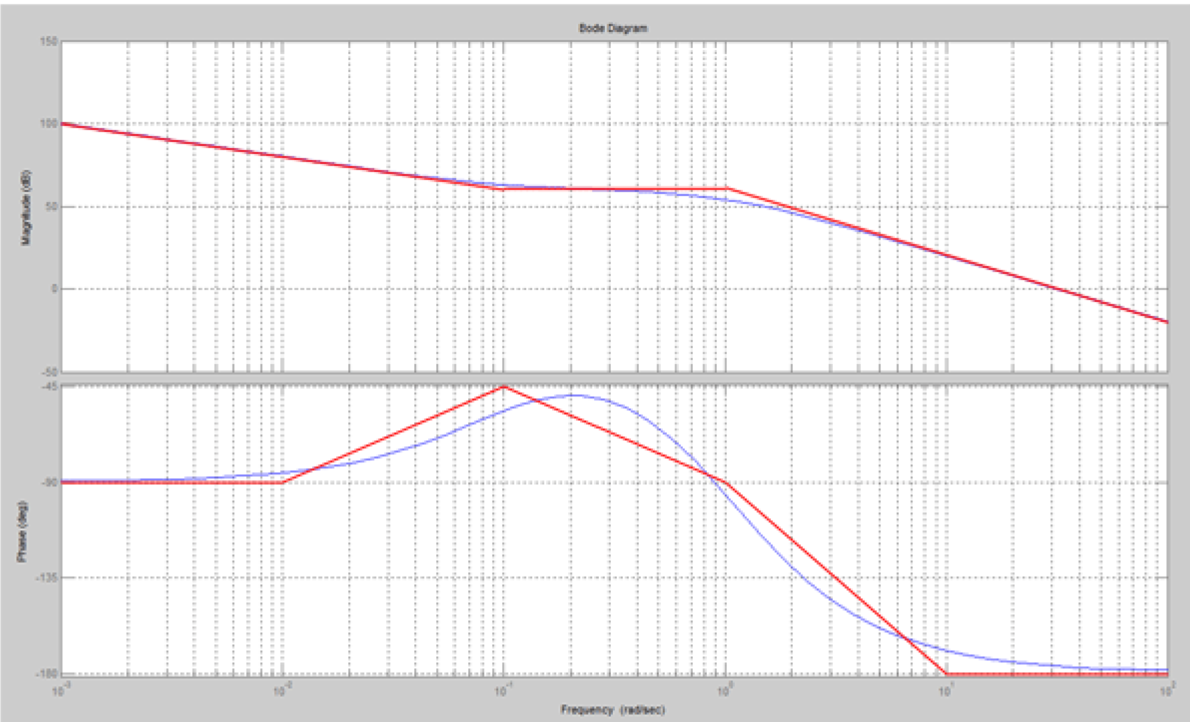
Poiché è presente un polo nell'origine possiamo subito affermare che, il grafico del modulo inizierà con una pendenza di -20dB/dec. Andiamo a calcolare il modulo e la fase in un punto che preceda la più piccola delle singolarità (nel nostro caso possiamo scegliere ω = 0,01).

$$|F(j0{,}01)| = \left|\frac{10^3(j0{,}01+0{,}1)}{j0{,}01(j0{,}01+1)^2}\right| = \frac{10^3|j0{,}01+0{,}1|}{|j0{,}01||j0{,}01+1|^2} \cong \frac{10^3 \cdot 0{,}1}{0{,}01 \cdot 1^2} = \frac{100}{0{,}01} = 10^4$$

$$|F(j0{,}01)|_{dB} = 20\log(|F(j0{,}01)|) = 20\log(10^4) = 20 \cdot 4 = 80dB$$

$$\measuredangle F(j0{,}01) = \measuredangle 10^3 + \measuredangle(j0{,}01+0{,}1) - \measuredangle j0{,}01 - 2 \cdot \measuredangle(j0{,}01+1) \cong 0 + 0 - 90° - 0 = -90°$$

A questo punto possiamo disegnare i diagrammi del modulo e della fase che si presenteranno come nella figura seguente:



In **rosso** è disegnato il diagramma asintotico, mentre in **blu** quello reale.

ESERCIZIO 2

Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase della seguente funzione di trasferimento:

$$F(s) = \frac{10(s+1)}{(s+0{,}1)(s-1)}$$

Determiniamo gli ZERI:

$(s+1) = 0 \ \rightarrow s = -1 \Rightarrow zero\ in -1$

Determiniamo i POLI:

$$(s+0{,}1)(s-1) = 0 \ \rightarrow \begin{cases}(s+0{,}1) = 0 \\ (s-1) = 0\end{cases} \ \Rightarrow \ \begin{cases}polo\ in\ -0{,}1 \\ polo\ in\ +1\end{cases}$$

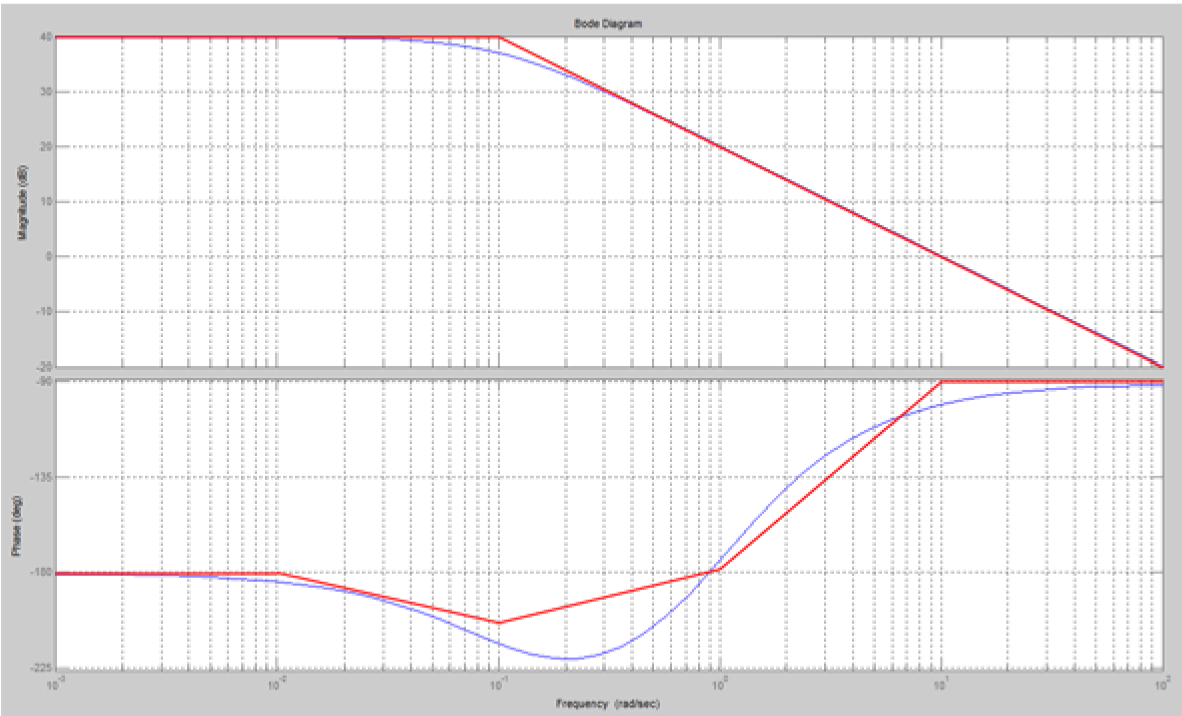
In questo caso non abbiamo singolarità nell'origine, quindi il diagramma del modulo inizierà con una pendenza nulla. Andiamo a calcolare il valore del modulo e della fase iniziali (nel nostro caso sceglieremo ω = 0):

$$|F(j0)| = \left|\frac{10(j0+1)}{(j0+0{,}1)(j0-1)}\right| = \frac{10|j0+1|}{|j0+0{,}1||j0-1|} \cong \frac{10 \cdot 1}{0{,}1 \cdot 1} = \frac{10}{0{,}1} = 100$$

$$|F(j0)|_{dB} = 20\log(|F(j0)|) = 20\log(100) = 20 \cdot 2 = 40dB$$

$$\measuredangle F(j0) = \measuredangle 10 + \measuredangle(j0+1) - \measuredangle(j0+0{,}1) - \measuredangle(j0-1) \cong 0 + 0 - 0 - 180° = -180°$$

A questo punto possiamo disegnare i diagrammi del modulo e della fase che si presenteranno come nella figura seguente:



ESERCIZIO 3

Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase della seguente funzione di trasferimento:

$$F(s) = \frac{10^4(s^2+s+1)}{s(s+10)(s+100)}$$

Determiniamo gli ZERI:

$$(s^2+s+1) = 0 \quad \rightarrow \quad s = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \omega_n = 1$$

Zeri complessi coniugati a parte reale negativa.

Determiniamo i POLI:

$$s(s+10)(s+100) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} s = 0 \\ s+10 = 0 \\ s+100 = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} polo\ nell'origine \\ polo\ in -10 \\ polo\ in -100 \end{cases}$$

Poiché è presente un polo nell'origine possiamo subito affermare che, il grafico del modulo inizierà con una pendenza di -20dB/dec. Andiamo a calcolare il modulo e la fase in un punto che preceda la più piccola delle singolarità (nel nostro caso possiamo scegliere ω = 0,1).

$$|F(j0{,}1)| = \left| \frac{10^4[(j0{,}1)^2 + j0{,}1 + 1]}{j0{,}1 \cdot (j0{,}1+10) \cdot (j0{,}1+100)} \right| = \frac{10^4|j0{,}1 + 0{,}99|}{|j0{,}1| \cdot |j0{,}1+10| \cdot |j0{,}1+100|} \cong$$
$$\cong \frac{10^4 \cdot 1}{0{,}1 \cdot 10 \cdot 100} = \frac{10^4}{10^2} = 10^2$$

$$|F(j0{,}1)|_{dB} = 20\log(|F(j0{,}1)|) = 20\log(10^2) = 20 \cdot 2 = 40dB$$

$$\measuredangle F(j0{,}1) = \measuredangle 10^4 + \measuredangle[(j0{,}1)^2 + j0{,}1 + 1] - \measuredangle j0{,}1 - \measuredangle(j0{,}1+10) - \measuredangle(j0{,}1+100) \cong$$
$$\cong 0 + 0 - 90° - 0 - 0 = -90°$$

Diagramma del modulo		Pendenza
$\omega < 1$	Agisce solo il polo nell'origine, quindi il grafico inizia con una pendenza di -20 dB/dec e a frequenza ω = 0,1 vale 40 dB	–20 dB/dec
$1 < \omega < 10$	Agiscono i due zeri che variano la pendenza di +40 dB/dec	+20 dB/dec
$10 < \omega < 100$	Agisce il polo in -10 che varia la pendenza di – 20 dB/dec	0 dB/dec
$\omega > 100$	Agisce il polo in -100 che varia la pendenza di – 20 dB/dec	– 20 dB/dec

Diagramma della fase		Pendenza/Valore
$\omega < 0{,}1$	Fase iniziale: $\measuredangle F(j0{,}1)$	– 90°
$0{,}1 < \omega < 1$	Agiscono solo i due zeri complessi a parte reale negativa	+90°/dec
$1 < \omega < 10$	Agiscono i due zeri complessi a parte reale negativa (+90°/dec) e il polo in –10 (–45°/dec).	+45°/dec
$10 < \omega < 100$	Agisce il polo in –10 (–45°/dec) e il polo in –100 (–45°/dec)	– 90°/dec

$100 < \omega < 10^3$	Agisce solo il polo in –100 (–45°/dec)	– 45°/dec
$\omega > 10^3$	Con 2 zeri e 3 poli la fase finale deve essere –90°	– 90°

I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento sono i seguenti: